Elasticidade dos corpos rígidos

Os corpos rígidos alteram-se quando os puxamos ou comprimimos

Esforço de tensão

Esforço volumétrico

Esforço de corte

"Esforço" - caracteriza a intensidade das forças que provocam a deformação

Stress — força, pressão

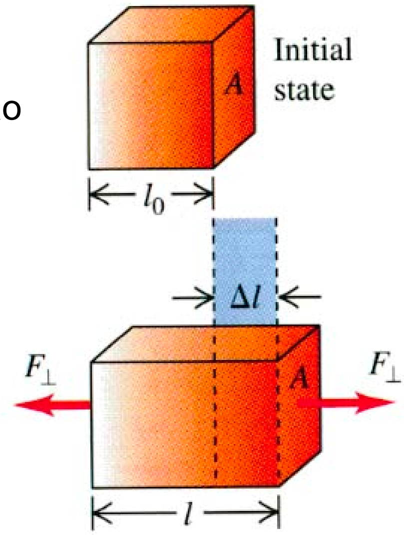
"Deformação" - caracteriza a deformação causada pelo esforço

Strain — linear, volumétrica

$$\frac{Esforço}{Deformação} = Módulo\ de\ elasticidade \longrightarrow$$ Lei de Hooke

Esforço e Deformação de Tensão

$F_\perp$ Força aplicada perpendicularmente à secção



Esforço de Tensão = $\dfrac{F_\perp}{A}$ (Pa)

Deformação de Tensão = $\dfrac{l - l_0}{l_0} = \dfrac{\Delta l}{l_0}$

Se o esforço de tensão for pequeno (limite elástico)

Módulo de Young $Y = \dfrac{esforço\ tensão}{deformação\ tensão} = \dfrac{F_\perp / A}{\Delta l / l_0} = \dfrac{F_\perp}{A} \dfrac{l_0}{\Delta l}$ (Pa)

Esforço e Deformação de Compressão

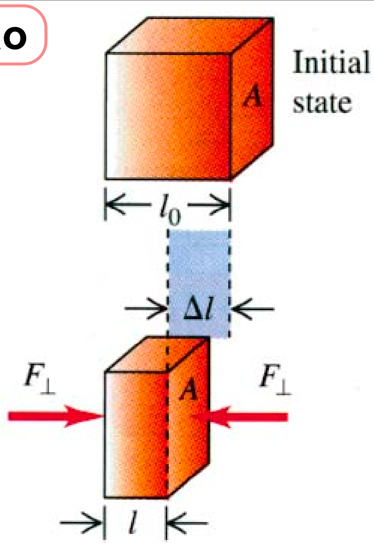
Esforço de Compressão = $\dfrac{F_\perp}{A}$ (Pa)

Deformação de Compressão = $\dfrac{l-l_0}{l_0} = \dfrac{\Delta l}{l_0}$

$$Y = \frac{F_\perp}{A}\frac{l_0}{\Delta l}$$

Normalmente $Y_{tensão} \cong Y_{compressão}$

Excepção: materiais compósitos - cimento!



Material sujeito a compressão e tensão simultaneamente

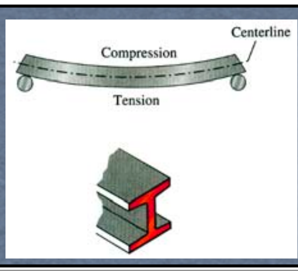
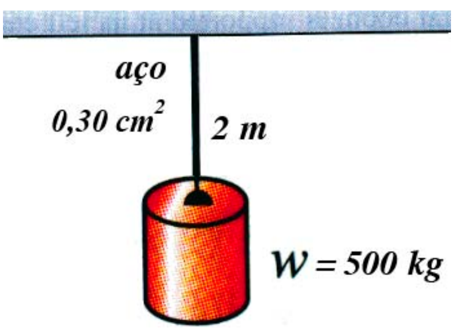


Table 11.1 Approximate Elastic Moduli

Material	Young's Modulus, Y (Pa)
Aluminum	7.0×10^{10}
Brass	9.0×10^{10}
Copper	11×10^{10}
Crown glass	6.0×10^{10}
Iron	21×10^{10}
Lead	1.6×10^{10}
Nickel	21×10^{10}
Steel	20×10^{10}

Exemplo:



Material	Young's Modulus (Pa)
Aluminum	7×10^{10}
Steel	20×10^{10}
Brick	2×10^{10}
Glass	7×10^{10}
Bone (along axis)	
Tension	1.6×10^{10}
Compression	0.9×10^{10}
Hardwood	10^{10}
Tendon	2×10^{7}
Rubber	10^{6}
Blood vessels	2×10^{5}

$$esforço = \frac{F_\perp}{A} = \frac{(500\,kg)(9,8\,ms^{-2})}{3,0\times10^{-5}\,m^2} = 1,6\times10^{8}\ Pa$$

(260kg)

$8,2\times10^{6}\ Pa$

osso (2m x 3cm^2)

$$deformação = \frac{\Delta l}{l_0} = \frac{esforço}{Y} = \frac{1,6\times10^{8}\ Pa}{20\times10^{10}\ Pa} = 8,0\times10^{-4}$$

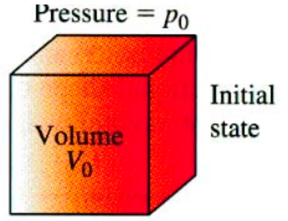
$9,0\times10^{-4}$

$$Elongação = \Delta l = (deformação)\times l_0 = (8,0\times10^{-4})(2.0m) = 0,0016\,m = 1,6\,mm$$

1,8 mm

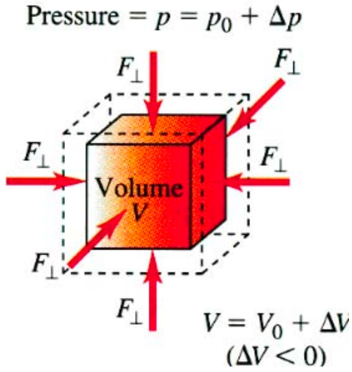
Esforço e Deformação Volumétricos

Corpo mergulhado num líquido ➡ esforço volumértico
deformação volumétrica



Esforço é uniforme ⟶ Pressão do fluido

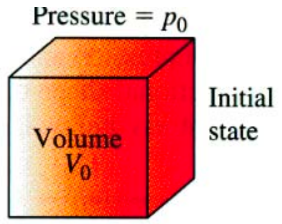
$$p = \frac{F_\perp}{A} \quad \text{(Pa)}$$



$$\text{Deformação volumétrica} = \frac{\Delta V}{V}$$

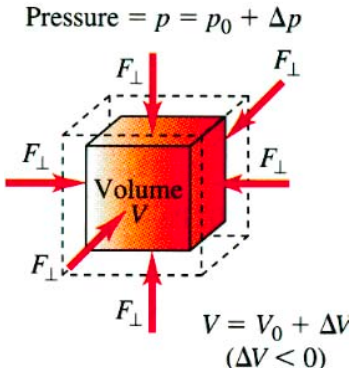
Esforço e Deformação Volumétricos

Módulo de compressibilidade:



$$B = \frac{\textit{esforço volumétrico}}{\textit{deformação volumétrica}} = -\frac{\Delta p}{\Delta V / V_0}$$

$$\Delta p > 0 \Longrightarrow \Delta V < 0$$



Compressibilidade:

$$k = \frac{1}{B} = -\frac{\Delta V / V_0}{\Delta p} = -\frac{1}{V_0}\frac{\Delta V}{\Delta p} \quad (\text{Pa}^{-1})$$

Esforço e Deformação Volumétricos

$$B = -\frac{\Delta p}{\Delta V / V_0}$$

$$k = -\frac{\Delta V / V_0}{\Delta p}$$

Material	Módulo de compressibilidade (Pa)	compressibilidade (Pa^{-1})
Alumínio	$7{,}5 \times 10^{10}$	$1{,}3 \times 10^{-11}$
Cobre	14×10^{10}	$0{,}7 \times 10^{-11}$
Vidro Crown	$5{,}0 \times 10^{10}$	$2{,}0 \times 10^{-11}$
Ferro	16×10^{10}	$0{,}6 \times 10^{-11}$
Chumbo	$4{,}1 \times 10^{10}$	$2{,}4 \times 10^{-11}$
Níquel	17×10^{10}	$0{,}6 \times 10^{-11}$
Aço	16×10^{10}	$0{,}6 \times 10^{-11}$
LÍQUIDOS		
Álcool etílico	$0{,}09 \times 10^{10}$	111×10^{-11}
Glycerina	$0{,}47 \times 10^{10}$	21×10^{-11}
Mercurio	$2{,}7 \times 10^{10}$	$3{,}7 \times 10^{-11}$
Água	$1{,}3 \times 10^{10}$	$7{,}7 \times 10^{-11}$
Músculo	$0{,}5 \times 10^{10}$	20×10^{-11}

Esforço e Deformação Volumétricos

Exemplo: Recorde de mergulho em apneia = 170m,
qual é a diminuição de volume do corpo a essa profundidade

$$\Delta p = p_{final} - p_{atm} = 16\,atm = 1{,}62 \times 10^{6}\,Pa$$

10 m de água = 1 atm

$$\frac{\Delta V}{V_0} = -\frac{\Delta p}{B} = -\Delta p\, k = 3{,}24 \times 10^{-4}$$

$k = 20 \times 10^{-11}\ Pa^{-1}$

$B = 0{,}5 \times 10^{10}\ Pa$

$$\Delta V = 0{,}07 \times 3{,}24 \times 10^{-4} = 2{,}3 \times 10^{-5}\ m^3 = 23\,cm^3$$

Esforço e Deformação de Corte

$$\text{Esforço de Corte} = \frac{F_{\parallel}}{A} \quad \text{(Pa)}$$

$$\text{Deformação de Corte} = \frac{x}{h}$$

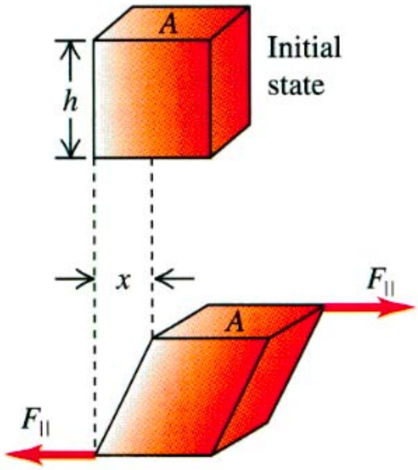


Table 11.1 Approximate Elastic Moduli

Material	Shear Modulus, S (Pa)
Aluminum	2.5×10^{10}
Brass	3.5×10^{10}
Copper	4.4×10^{10}
Crown glass	2.5×10^{10}
Iron	7.7×10^{10}
Lead	0.6×10^{10}
Nickel	7.8×10^{10}
Steel	7.5×10^{10}

Módulo de corte (deslizamento):

$$S = \frac{\textit{esforço de corte}}{\textit{deformação de corte}} = \frac{F_{\parallel}/A}{x/h} = \frac{F_{\parallel}}{A}\frac{h}{x}$$

Módulos de elasticidade

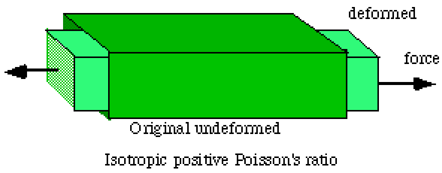
Table 11.1 Approximate Elastic Moduli

Material	Young's Modulus, Y (Pa)	Bulk Modulus, B (Pa)	Shear Modulus, S (Pa)
Aluminum	7.0×10^{10}	7.5×10^{10}	2.5×10^{10}
Brass	9.0×10^{10}	6.0×10^{10}	3.5×10^{10}
Copper	11×10^{10}	14×10^{10}	4.4×10^{10}
Crown glass	6.0×10^{10}	5.0×10^{10}	2.5×10^{10}
Iron	21×10^{10}	16×10^{10}	7.7×10^{10}
Lead	1.6×10^{10}	4.1×10^{10}	0.6×10^{10}
Nickel	21×10^{10}	17×10^{10}	7.8×10^{10}
Steel	20×10^{10}	16×10^{10}	7.5×10^{10}

Razão de Poisson

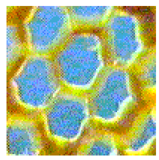
Razão entre a deformação Transversal e a deformação Longitudinal provocada por um esforço longitudinal.

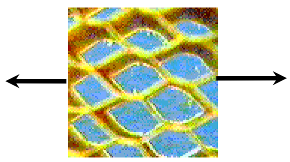
$$n = -\frac{\overbrace{Def_{transv.}}^{<0}}{\underbrace{Def_{longit.}}_{>0}}$$



n depende de módulo de Young (Y)
e do módulo de corte (S):

$$Y = 2\,S\,(1 + n)$$





Material	Razão de Poisson
Aluminio	0,4
Aço	0,25
Osso	0,30

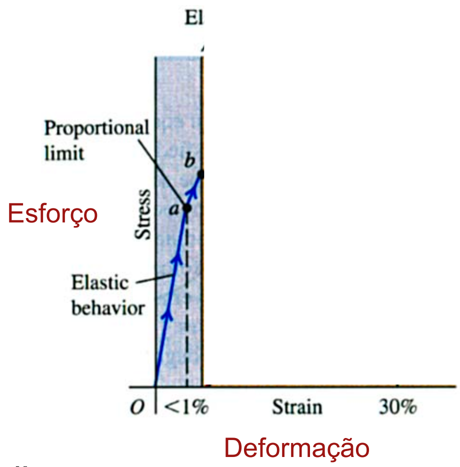
Elasticidade e Plasticidade

Validade da Lei de Hooke ⇒ Deformação < 0,01 (1%)

de **a** a **b** $\begin{cases} \text{não proporcional} \\ \text{reversível} \end{cases}$

b = limite de elasticidade

d = limite de fractura



Se **d** longe de b ⟶ material dúctil

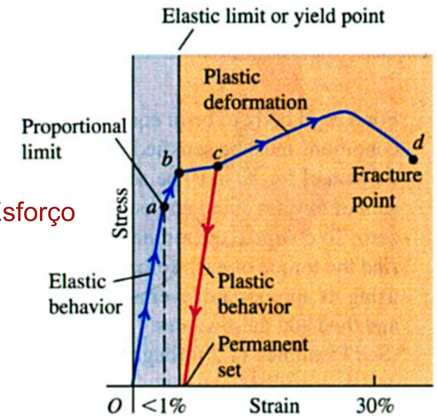
Se **d** perto de b ⟶ material frágil

Elasticidade e Plasticidade

Esforço em **d** ⟶ Força de ruptura

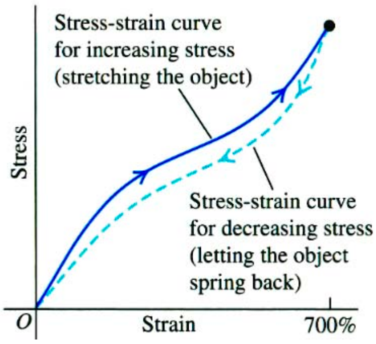
Material	Young's Modulus, E	Ultimate Tension Strength, σ_t
Aluminum	7×10^{10}	2×10^{8}
Steel	20×10^{10}	5×10^{8}
Brick	2×10^{10}	4×10^{7}
Glass	7×10^{10}	5×10^{7}
Bone (along axis)		
Tension	1.6×10^{10}	12×10^{7}
Compression	0.9×10^{10}	
Hardwood	10^{10}	
Tendon	2×10^{7}	
Rubber	10^{6}	
Blood vessels	2×10^{5}	

Esforço



Deformação

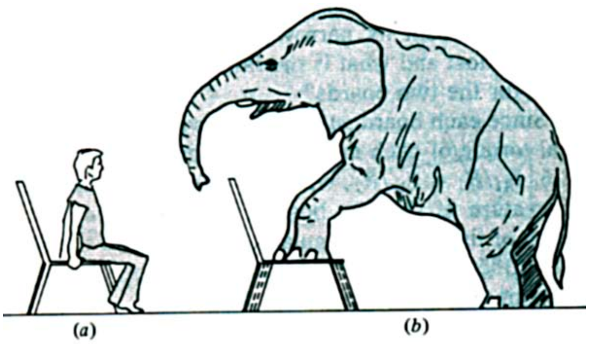
Borracha vulcanizada ⟶

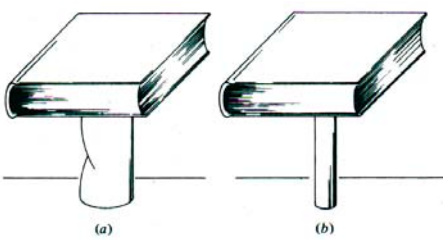


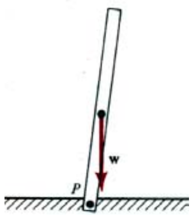
Que altura podem ter as árvores?

Porque caem as colunas quando colocamos demasiado peso em cima delas?

Porque é que as pernas das cadeiras e mesas de metal são ocas e não sólidas?







Qualquer coluna vertical colapsa se, mantendo o seu raio fixo, aumentarmos a sua altura!

Que altura podem ter as árvores?

Para um cilindro de raio r suportando só o seu próprio peso:

Altura crítica: $$\boxed{h_{critica} = c r^{2/3}}$$

$$c \Rightarrow \begin{cases} \text{densidade} \\ \text{módulo de Young} \end{cases}$$

$$\boxed{h_{critica} = c r^{2/3}}$$

Exemplo: 2 colunas do mesmo material — $r_1 \quad e \quad 2r_1$

se ambas só puderem suportar o seu próprio peso,
qual é a razão entre as suas alturas?

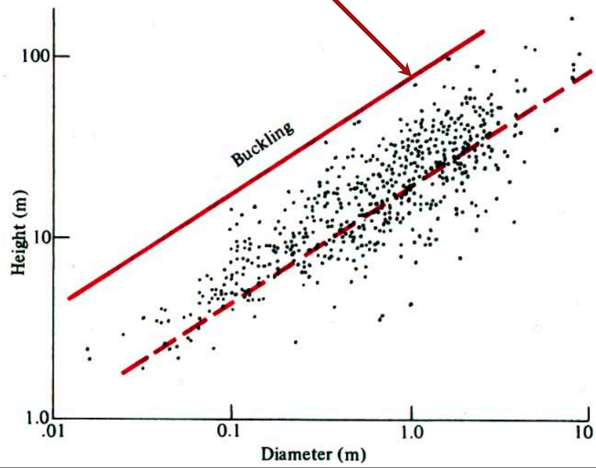
$$\frac{h_2}{h_1} = \frac{(2r_1)^{2/3}}{r_1^{2/3}} = 2^{2/3} = 1,59$$

$$h_2 = 1,6 \times h_1$$

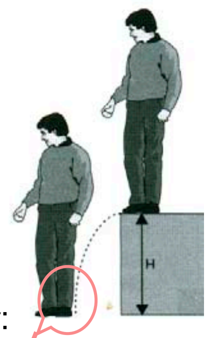
Que altura podem ter as árvores?

Para um cilindro de raio r suportando só o seu próprio peso:

Altura crítica: $h_{critica} = cr^{2/3}$ $\quad c \Rightarrow \begin{cases} \text{densidade} \\ \text{módulo de Young} \end{cases}$



Exemplo: A *tíbia* é o osso mais vulnerável da perna do ser humano. Esse osso sofre fratura para esforços de *compressão* da ordem de 5×10^4 N. Suponha que um homem com 75 kg de massa salte de uma altura H e, ao cair no chão, *não dobre os joelhos*. O esforço que a tíbia sofre faz com que ela tenha um encurtamento $\Delta l \approx 1$ cm. Qual deverá ser o valor máximo de H para que esse osso não fracture?



Quando bate no chão a travagem é feita pelo osso a encolher:

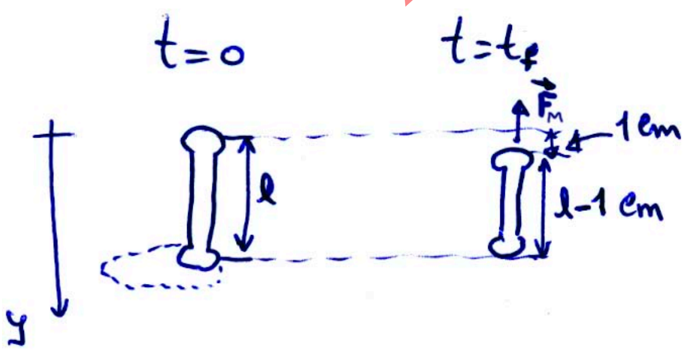
A força de travagem tem que dissipar toda a energia adquirida na queda!

Energia inicial:

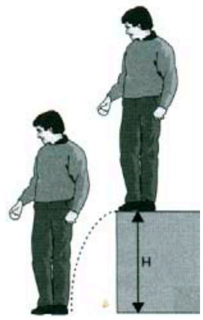
$$E_i = E_C + E_P = 0 + mgH$$

Energia final (quando toca o chão):

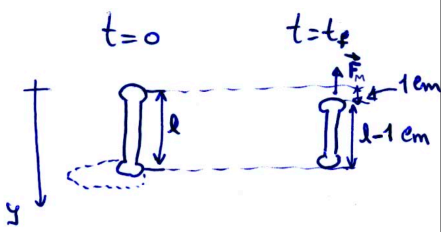
$$E_f = E_C + E_P = \frac{1}{2}mv^2 + 0$$



Exemplo: A *tíbia* é o osso mais vulnerável da perna do ser humano. Esse osso sofre fratura para esforços de *compressão* da ordem de 5×10^4 N. Suponha que um homem com 75 kg de massa salte de uma altura H e, ao cair no chão, *não dobre os joelhos*. O esforço que a tíbia sofre faz com que ela tenha um encurtamento $\Delta l \approx 1$ cm. Qual deverá ser o valor máximo de H para que esse osso não frature?



$$E_i = E_f \quad \Rightarrow \quad mgH = \frac{1}{2}mv^2$$



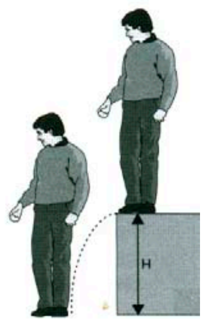
$$\boxed{v^2 = 2gH}$$

Esta energia é dissipada pela força máxima que o osso pode exercer ao encolher

$$W_{F_M} = \frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv^2$$

$$-F_M \Delta l = 0 - \frac{1}{2}mv^2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{F_M = \frac{mv^2}{2\Delta l} = \frac{mgH}{\Delta l}}$$

Exemplo: A *tíbia* é o osso mais vulnerável da perna do ser humano. Esse osso sofre fratura para esforços de *compressão* da ordem de 5×10^4 N. Suponha que um homem com 75 kg de massa salte de uma altura H e, ao cair no chão, *não dobre os joelhos*. O esforço que a tíbia sofre faz com que ela tenha um encurtamento $\Delta l \approx 1$ cm. Qual deverá ser o valor máximo de H para que esse osso não frature?



A força de travagem é fornecida pelo osso $\quad F_M = F_{compr.}$

Relação entre a força de compressão e a altura de que pode cair:

$$F_{compr.} = \frac{mgH}{\Delta l}$$

Ou $$\boxed{H = \frac{F_{compr.}\Delta l}{mg}} = \frac{5\times10^4 \; 0,01}{75\times9,8} = \boxed{0,7\,m}$$